☜ الباب الثاني : مفهوم الدالة .

المحتويـــــات

الكفاءات المستهدفة

1. تحديد دالة (متغيرها، مجموعة تعريفها، مجموعة قيمها).
2. تعيين صورة عدد أو سابقة (سوابق) عدد وفق دالة معرفة بواسطة منحنى أو دستور.
3. الربط بين دستور، جدول قيم و تمثيل بياني.
4. توظيف الحاسبة البيانية لإعطاء التمثيل البياني لدالة معرفة على مجال بواسطة دستور.
5. وصف سلوك دالة معرفة بمنحنى باستعمال التعبير الرياضي المناسب.
6. استنتاج جدول تغيرات دالة انطلاقا من تمثيلها البياني.
7. إرفاق جدول تغيرات معطى بتمثيل بياني ممكن.
8. استعمال الحاسبة البيانية لإيجاد القيم الحدية لدالة على مجال.
9. التعرف على شفعية دالة انطلاقا من تمثيلها البياني أو بالاعتماد على التعبير الجبري للخاصية.

الـــدرس

1. الدالة العددية لمتغير حقيقي

تعريف

D جزء من مجموعة الأعداد الحقيقية **R** .

تعريف دالة f على D هو إرفاق بكل عدد حقيقي x من D، عددا حقيقيا وحيدا يسمى صورة x

مصطلحات و ترميز

- يسمى الجزء D مجموعة تعريف الدالة f.
- نرمز إلى صورة عدد حقيقي x من D بالرمز $f(x)$ و نقرأ "" f لـِــ x ""
- إذا كان $y = f(x)$ نقول "" إن x سابقة للعدد y بالدالة f ""
- للتعبير عن الدالة f المعرفة على D يمكن أن نكتب: $f : x \mapsto f(x)$

أمثلة

مثال1

إذا أرفقنا بكل عدد حقيقي x من المجال $[-1;+\infty[$ العدد الحقيقي $\sqrt{x+1}$ نكون قد عرفنا دالة f على المجال $D = [-1;+\infty[$.

و يمكن أن نعبر بإحدى الطريقتين:

- f هي الدالة المعرفة على $[-1;+\infty[$ بـِــ: $f(x) = \sqrt{x+1}$
- $$\begin{aligned} f : [-1;+\infty[&\to \\ x &\mapsto \sqrt{x+1} \end{aligned}$$

مثال2

نعتبر الدالة g المعرفة على بـِــ: $g(x) = x^2 + 2x - 3$

- لدينا: $g(2) = 2^2 + 2\times 2 - 3 = 5$. إذن صورة العدد 2 هي العدد 5.
- لدينا: $g(-3) = 0$ و $g(1) = 0$. إذن -3 و 1 سابقتان للعدد 0.

ملاحظة: لكل عدد حقيقي من مجموعة التعريف صورة وحيدة بينما يمكن أن يكون لصورة عدة سوابق.

2. المنحني الممثل لدالة

تعريف

f دالة معرفة على جزء D من $\mathbb{R}$.

في معلم $(O;I;J)$ للمستوي، المنحني الممثل (أو التمثيل البياني) (C_f) للدالة f هو مجموعة النقط $M(x;y)$ حيث: $x \in D$ و $y = f(x)$

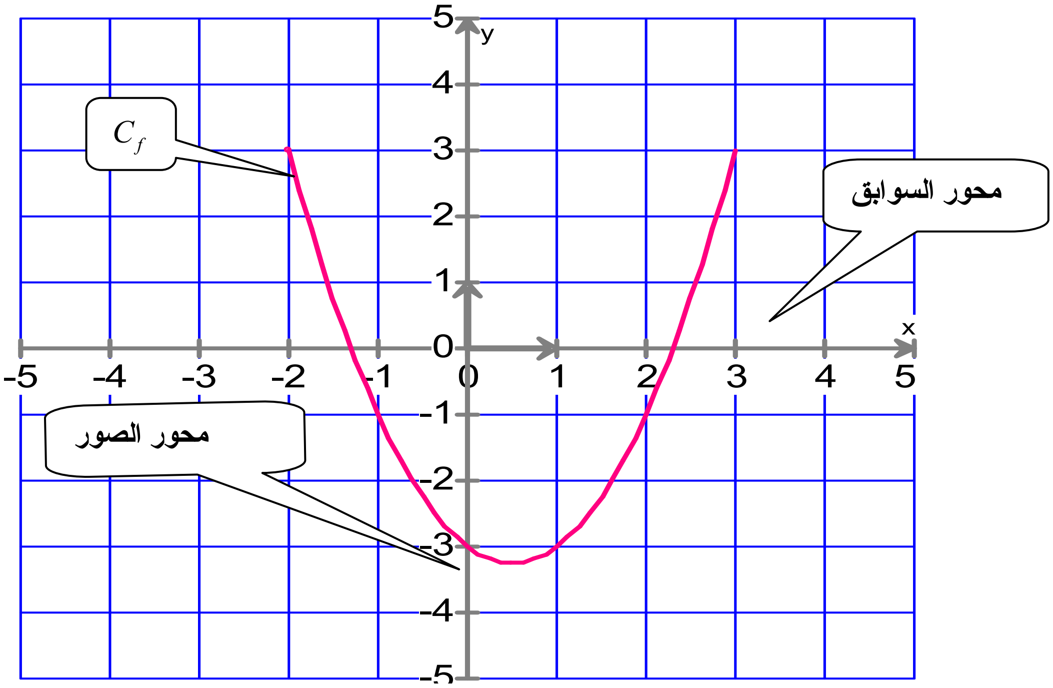
$y = f(x)$ هي معادلة للمنحني (C_f) في المعلم $(O;I;J)$

$M(x;y) \in (C_f)$ يكافئ $x \in D$ و $y = f(x)$

مثال

(C_f) المرسوم أدناه هو التمثيل البياني في، معلم $(O;I;J)$، للدالة f المعرفة على المجال $[-2;3]$ كما يلي: $f(x) = x^2 - x - 3$

معادلة (C_f) هي: $y = x^2 - x - 3$



نقرأ مثلا أن صورة العدد 0 هي -3 و أن صورة العدد -1 هي -1 كما نقرأ أن للعدد 3 سابقتان هما: -2 و 3 .

النقطة $A(1;-3)$ تنتمي إلى المنحني (C_f) لأن العدد 1 ينتمي إلى المجال $[-2;3]$ و $f(1) = 1^2 - 1 - 3 = -3$

3. تغيرات دالة على مجال

☒ اتجاه تغير دالة

تعريف

f دالة معرفة على مجال I من و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;I;J)$

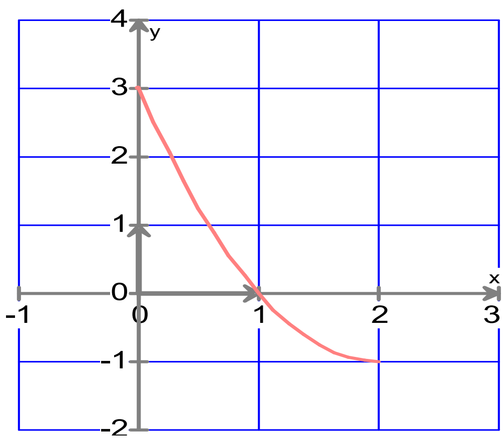
f متزايدة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I،

إذا كان $x_1 \prec x_2$ فإن $f(x_1) \prec f(x_2)$

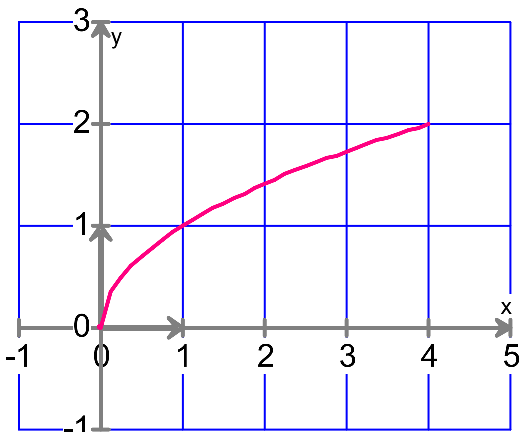
f متناقصة تماما على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I،

إذا كان $x_1 \prec x_2$ فإن $f(x_1) \succ f(x_2)$

f ثابتة على I يعني أنه من أجل كل عددين حقيقيين x_1 و x_2 من I،
$f(x_1) = f(x_2)$



f متناقصة تماما على $[0 ; 2]$



f متزايدة تماما على $[0 ; 4]$

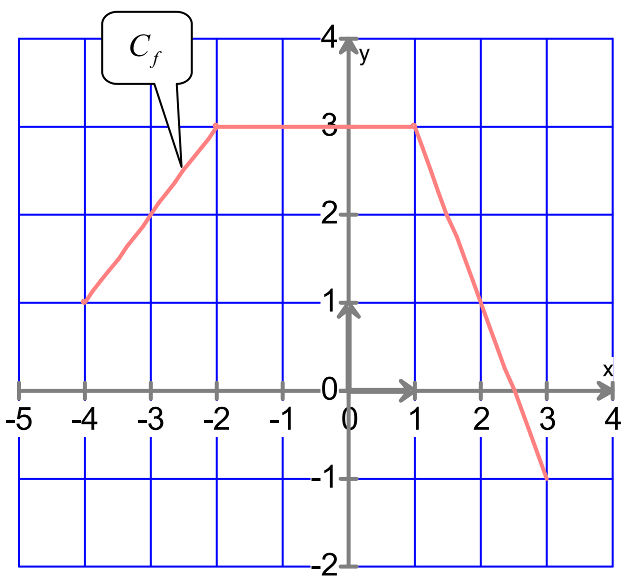
ملاحظة: **الدالة المتزايدة تحافظ على الترتيب بينما الدالة المتناقصة تعكسه.**

مثال: **المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $[-4;3]$. لدينا:**

f متزايدة تماما على المجال $[-4;-2]$

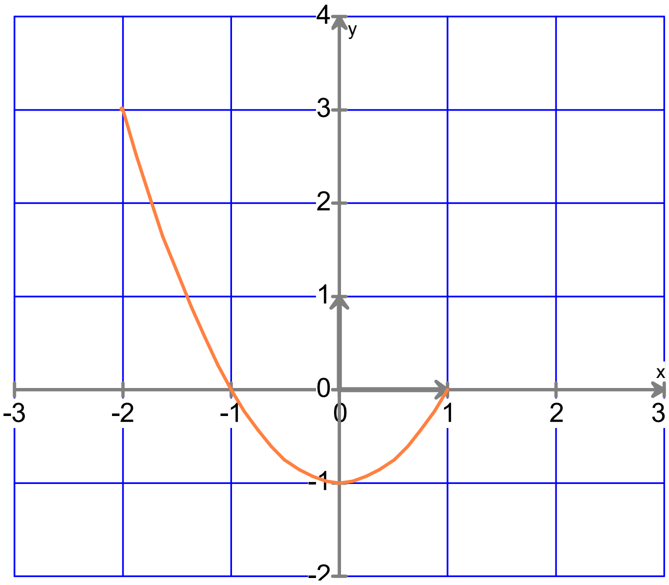
f ثابتة على المجال $[-2;1]$

f متناقصة تماما على المجال $[1 ; 3]$



☒ جدول التغيرات

دراسة تغيرات دالة f يعني تعيين أكبر المجالات التي تكون عليها f متزايدة، متناقصة أو ثابتة. تلخص هذه الخواص في جدول يسمى"" *جدول التغيرات* ""



مثال

المنحنى (C_f) المرسوم في الشكل

المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة

على المجال $[-2;1]$

الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2;0]$

و متزايدة تماما على المجال $[0;1]$.

جدول تغيرات f هو كالتالي:

x	-2	0	1
$f(x)$	3 ↘	-1 ↗	0

☒ القيم الحدية

تعريف

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbf{R}$ و (C_f) تمثيلها البياني في معلم $(O;I;J)$.

a عنصر من المجال I

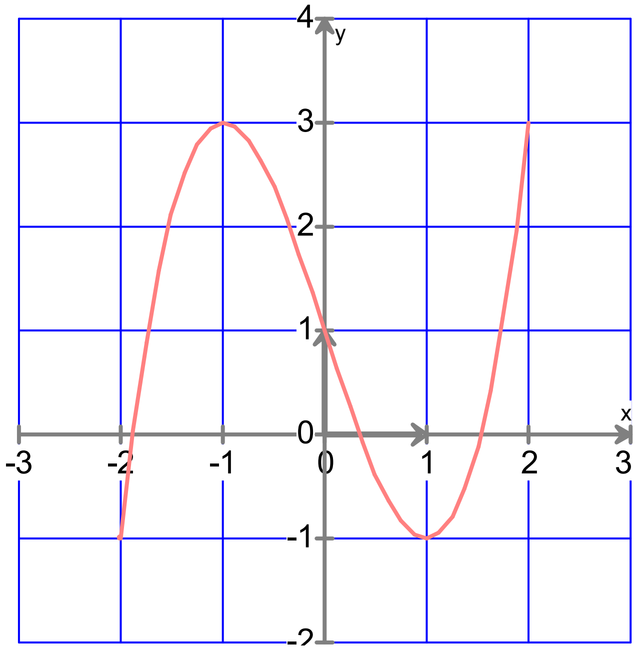
* **قول أن $f(a)$ هي القيمة الحدية العظمى للدالة f على I يعني:**

من أجل كل عدد x من I، $f(x) \leq f(a)$

* **قول أن $f(a)$ هي القيمة الحدية الصغرى للدالة f على I يعني:**

من أجل كل عدد x من I، $f(a) \leq f(x)$

مثال



المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على المجال $[-2\,;2]$

- الدالة f تقبل عند -1 قيمة حدية عظمى هي $f(-1)=3$ على المجال $[-2\,;0]$
- الدالة f تقبل عند 1 قيمة حدية صغرى هي $f(1)=-1$ على المجال $[\frac{1}{2}\,;2]$ مثلا .

ملاحظات

- القيمة الحدية لدالة على مجال هي عدد حقيقي.

يمكن أن تبلغ دالة قيمتها الحدية العظمى أو الصغرى على مجال عند أكثر من عنصر واحد من هذا المجال.

- الدالة f متزايدة على المجال $[a;c]$ و متناقصة على المجال $[c;b]$ و منه فهي تقبل قيمة حدية عظمى عند القيمة c . القيمة الحدية العظمى هي $f(c)$.

x	a		c		b
$f(x)$			$f(c)$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$f(a)$				$f(b)$

- الدالة f متناقصة على المجال $[a;c]$ و متزايدة على المجال $[c;b]$ و منه فهي تقبل قيمة حدية صغرى عند القيمة c . القيمة الحدية الصغرى هي $f(c)$.

x	a		c		b
$f(x)$	$f(a)$				$f(b)$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			$f(c)$		

- إذا كانت دالة f متزايدة تماما على المجال $[a\,;b]$ فإنها تبلغ قيمتها الحدية الصغرى عند a و تبلغ قيمتها الحدية العظمى عند b .
- إذا كانت دالة f متناقصة تماما على المجال $[a\,;b]$ فإنها تبلغ قيمتها الحدية الصغرى عند b و تبلغ قيمتها الحدية العظمى عند a .

4. شفعية دالة

تعريف

f دالة معرفة على جزء D من **R**.

* نقول عن f أنها دالة زوجية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل x من D لدينا: $-x \in D$ و $f(-x) = f(x)$

* نقول عن f أنها دالة فردية إذا وفقط إذا تحقق ما يلي:

من أجل كل x من D لدينا: $-x \in D$ و $f(-x) = -f(x)$

مثال1 الدالة f المعرفة على المجال $[-3;3]$ بـِ: $f(x) = x^2 - 2$ دالة زوجية لأن:

من أجل كل x من $[-3;3]$ لدينا: $-x \in [-3;3]$ و $f(-x) = f(x)$

$\left(-3 \le x \le 3 \right.$ يستلزم $\left. -3 \le -x \le 3 \right)$ و $\left(f(-x) = (-x)^2 - 2 = x^2 - 2 = f(x) \right)$

مثال2 الدالة g المعرفة على المجال بـِ: $g(x) = -x^3 + 2x$ دالة فردية لأن:

من أجل كل x من لدينا: $-x \in$ و $g(-x) = -g(x)$

$\left(x \in \right.$ يستلزم $\left. -x \in \right)$ و $\left(g(-x) = -(-x)^3 + 2(-x) = x^3 - 2x = -(-x^3 + 2x) = -g(x) \right)$

مثال3 الدالة h المعرفة على المجال $[-5;+\infty[$ بـِ: $h(x) = x^2 + 1$ ليست زوجية و لا فردية لأن مثلا

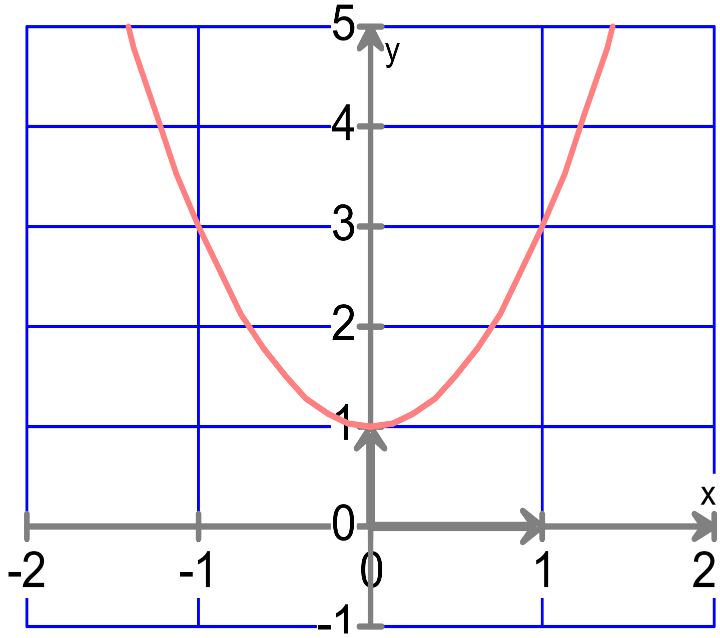
$6 \in [-5;+\infty[$ بينما $-6 \notin [-5;+\infty[$

مثال4 الدالة k المعرفة على المجال $]-4;4[$ بـِ: $k(x) = x^2 + x$ ليست زوجية و لا فردية لأن مثلا

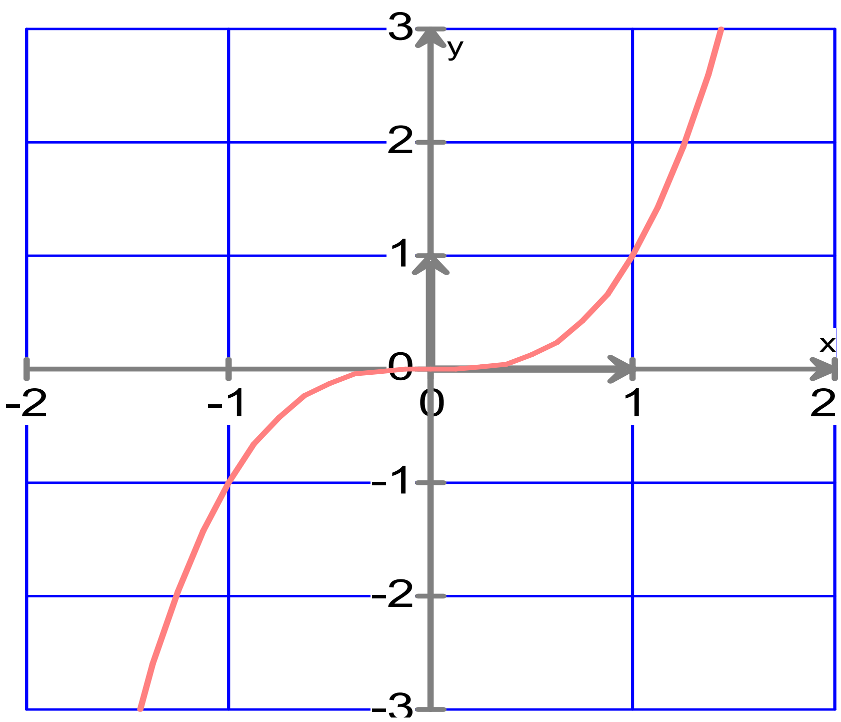
$k(-1) \ne k(1)$ و $k(-1) \ne -k(1)$ $\left(k(1) = 2 \right.$ و $\left. k(-1) = 0 \right)$

ملاحظة

منحني دالة زوجية في معلم متعامد يكون متناظرا بالنسبة إلى محور التراتيب.



منحني دالة فردية في معلم كيفي يكون متناظرا بالنسبة إلى مبدأ المعلم



مشكلات وطرائـــــق

تمرين محلول 1

حساب صورة عدد حقيقي بدالة معرفة بدستور

النـــص:

f هي الدالة المعرفة على بـِـ: $f(x)=x^2+x+2$

احسب بواسطة الدالة f صورة كل من -3 و $\frac{3}{2}$

الحـــل:

$$f(-3)=(-3)^2+(-3)+2=9-3+2=8$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)+2=\frac{9}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{23}{4}$$

طـــــريقـــة

لحساب صورة عدد حقيقي a بواسطة دالة f، نعوض x بالعدد الحقيقي a في عبارة $f(x)$

تمرين محلول 2

حساب سوابق عدد حقيقي بدالة معرفة بدستور

النـــص:

f هي الدالة المعرفة على $[-1;3]$ بـِـ: $f(x)=x^2-3$

أحسب بواسطة الدالة f، في حالة وجودها، سوابق العدد الحقيقي 1.

الحـــل:

لنعين الأعداد الحقيقية x من $[-1;3]$ التي تحقق: $f(x)=1$

$f(x)=1$ **تكافئ** $x^2-3=1$ **أي** $x^2-4=0$

$x^2-4=0$ **تكافئ** $(x-2)(x+2)=0$ **أي** $x=2$ **أو** $x=-2$

نلاحظ أن $2\in[-1;3]$ **بينما** $-2\notin[-1;3]$.

إذن للعدد الحقيقي 1 سابقة وحيدة هي 2

طـــــريقـــة

لحساب سوابق عدد حقيقي b بواسطة دالة f معرفة على جزء D من يكفي حل المعادلة، ذات المجهول x، $f(x)=b$ في D.

تمرين محلول 3

قراءة صورة أو سوابق على تمثيل بياني

النــــــص:

المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f. أجب عن الأسئلة التالية بالقراءة على المنحني (C_f).

1 . عين D مجموعة تعريف الدالة f

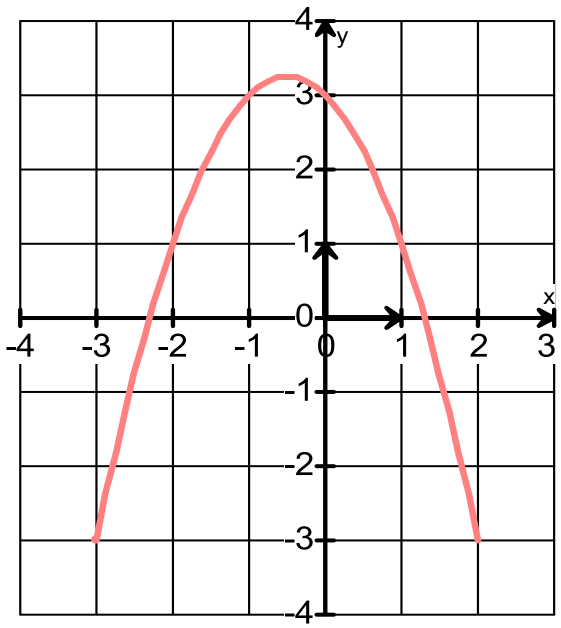
2 . ما هي صورة العدد -1 بواسطة الدالة f ؟

3 . عين العدد $f(0)$

4 . عين الأعداد التي صورها العدد -3 بـِـ f

5 . حل بيانيا المعادلة $f(x)=1$

6 . حل بيانيا المتراجحة $f(x)\geq 1$



الحـــــل:

1. مجموعة تعريف الدالة f هي: $D=[-3;2]$

2. ترتيب نقطة المنحني (C_f) التي فاصلتها -1 هو 3. إذن صورة -1 هي 3

3. $f(0)=3$ لأن 3 هو ترتيب نقطة المنحني (C_f) التي فاصلتها 0

4. نقطتان من (C_f) ترتيبيهما -3. فاصلتا هاتين النقطتين هما -3 و 2. إذن يوجد عددان صورتاهما -3 هما -3 و 2.

5. نرسم في نفس المعلم السابق المستقيم ذو المعادلة: $y=1$. نلاحظ وجود نقطتي تقاطع مع المنحني (C_f)، نقرأ فاصلة كل من هاتين النقطتين. للمعادلة $f(x)=1$ حلان: -2 و 1

مجموعة الحلول هي إذن: $S = \{-2;1\}$

6. ننظر إلى نقط المنحني (C_f) التي ترتيبها أكبر من أو يساوي 1. فواصل هذه النقط هي حلول المتراجحة $f(x)\geq 1$. نقرأ: $-2\leq x\leq 1$. مجموعة الحلول هي إذن: $S=[-2;1]$

طـــــريقــة

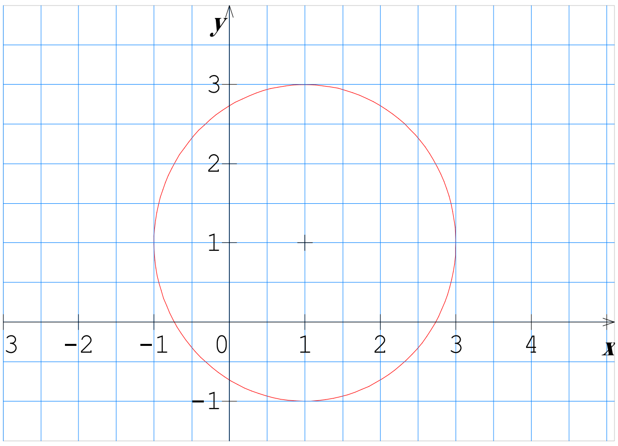
تقرأ السوابق على محور الفواصل بينما تقرأ الصور على محور التراتيب

تمرين محلول 4

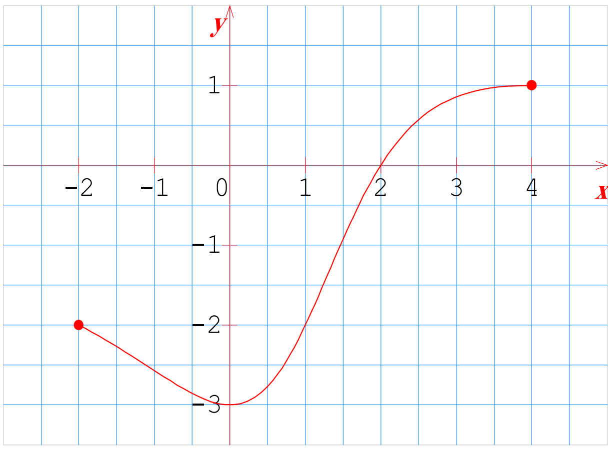
التعرف على منحن يمثل دالة

النــــــص:

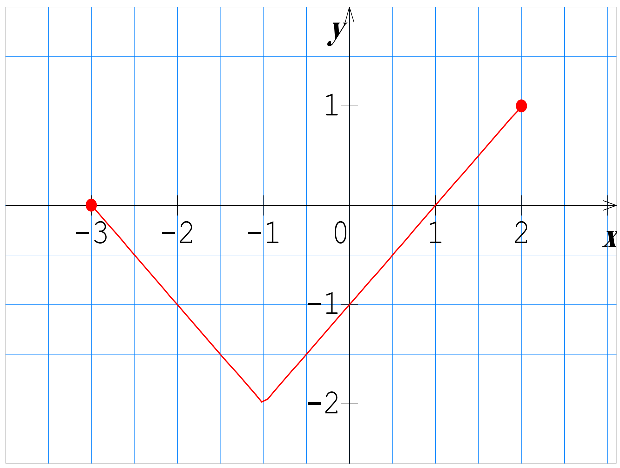
من بين المنحنيات التالية بين تلك التي تمثل دالة عددية محددا مجموعة تعريفها.



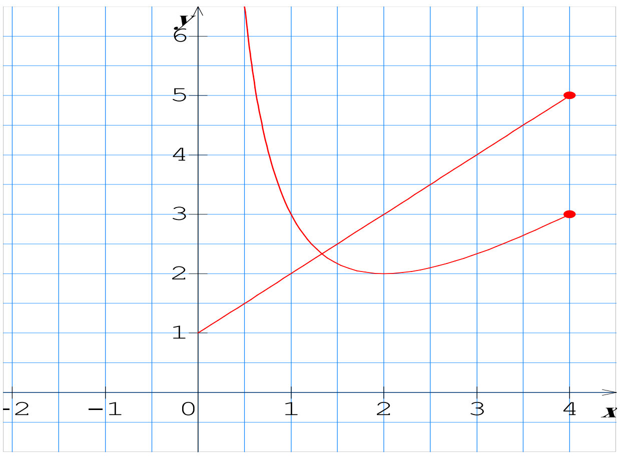
الشكل 1



الشكل 2



الشكل 3



الشكل 4

الحـــــل:

1. **المنحني المرسوم في الشكل1 لا يمثل دالة و إلا فسوف يكون – مثلا – للعدد 1 صورتان و هذا يتناقض مع تعريف دالة عددية. (المستقيم ذو المعادلة** $x=1$ **يقطع المنحني في نقطتين).**
2. **المنحني المرسوم في الشكل2 يمثل دالة مجموعة تعريفها** $[-2,4]$ **لأن لكل عنصر** α **من هذا المجال صورة وحيدة. (المستقيم ذو المعادلة** $x=\alpha$ **يقطع المنحني في نقطة وحيدة ترتيبها هي صورة** α **).**
3. **المنحني المرسوم في الشكل3 يمثل دالة مجموعة تعريفها** $[-3,2]$.
4. **المنحني المرسوم في الشكل4 لا يمثل دالة.**

تمرين محلول 5

رسم منحن متلائم مع جدول تغيرات

النـــــص:

جدول التغيرات الموالي هو لدالة f .

1 . **ما هي مجموعة تعريف الدالة** f **؟**

2 . **حدد اتجاه تغير الدالة** f .

3 . **ارسم منحن يمكن أن يكون التمثيل البياني للدالة** f .

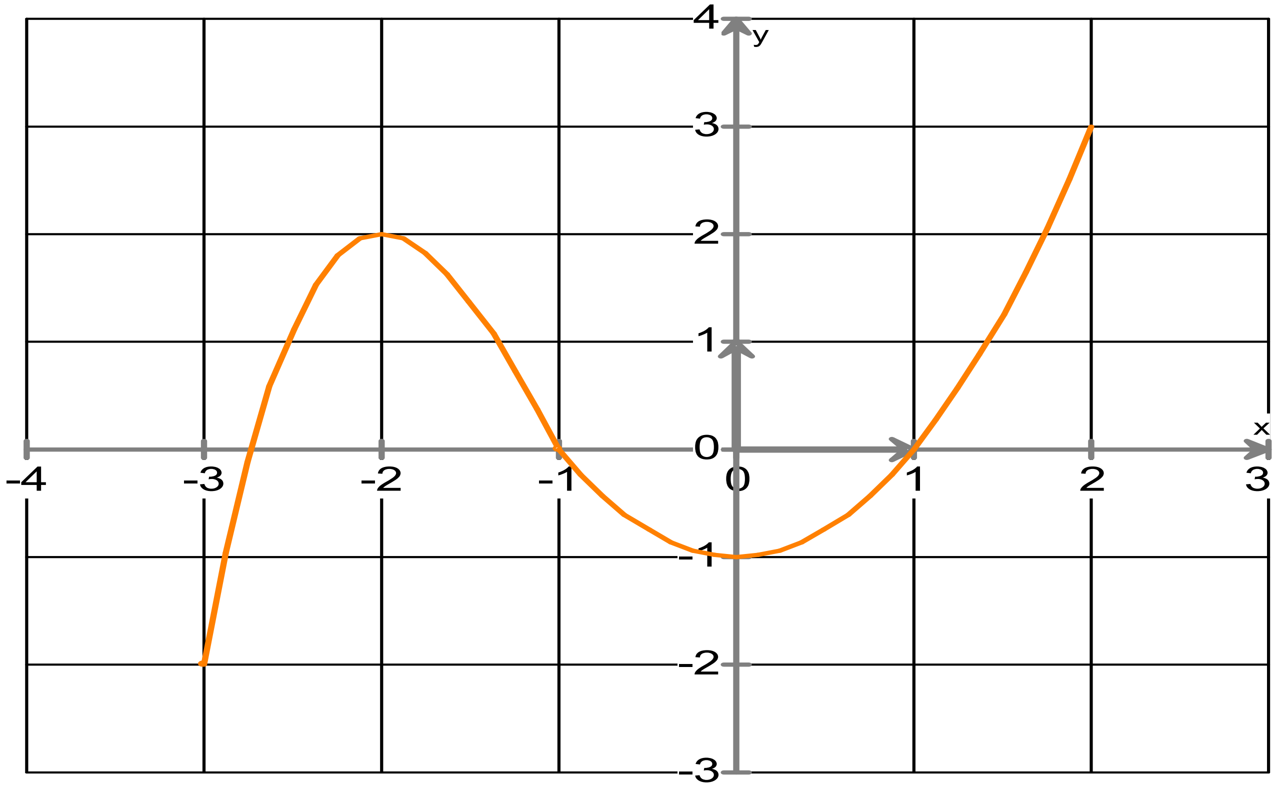
x	-3		-2		0		2
$f(x)$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

الحــــــل:

1. مجموعة التعريف D **للدالة** f **تقرأ من السطر** "x" **لجدول التغيرات و منه:** $D=[-3;2]$

2. من خلال جدول التغيرات فإن الدالة f **متزايدة تماما على المجال** $[-3;-2]$ **، متناقصة تماما على المجال** $[-2;0]$ **و متزايدة تماما على المجال** $[0;2]$ **.**

3. المنحني المرسوم أدناه هو تمثيل بياني ممكن للدالة f **.**



ملاحظة:

لا توجد طريقة وحيدة لرسم تمثيل بياني متلائم مع جدول تغيرات معطى.

تمرين محلول 6

دراسة اتجاه تغير دالة معرفة بدستور

النـــــص:

نعتبر الدالة f المعرفة على كما يلي:

$$f(x) = x^2 + 4x - 5$$

1 . تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = (x+2)^2 - 9$

2 . ادرس اتجاه تغير الدالة f على كل من المجالين $[-2,+\infty[$ **و** $]-\infty,-2]$

الحــــل:

1. من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - 9 &= (x^2 + 4x + 4) - 9\\ &= x^2 + 4x + 4 - 9\\ &= x^2 + 4x - 5\\ &= f(x)\end{aligned}$$

و منه لدينا من أجل كل عدد حقيقي x: $f(x) = (x+2)^2 - 9$

2. ليكن x_1 و x_2 عددان حقيقيان

- **نفرض x_1 و x_2 عنصرين من المجال $[-2,+\infty[$ حيث:** $x_1 < x_2$

لدينا إذن: $-2 \le x_1 < x_2$ **ومنه** $0 \le x_1 + 2 < x_2 + 2$

و بالتالي: $(x_1+2)^2 < (x_2+2)^2$ **ومنه** $(x_1+2)^2 - 9 < (x_2+2)^2 - 9$

وهكذا: $f(x_1) < f(x_2)$

إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-2,+\infty[$.

- نفرض x_1 و x_2 عنصرين من المجال $]-\infty,-2]$ حيث: $x_1 < x_2$

لدينا إذن: $x_1 < x_2 \leq -2$ ومنه $x_1 + 2 < x_2 + 2 \leq 0$

و بالتالي: $(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2$ ومنه $(x_1+2)^2 - 9 > (x_2+2)^2 - 9$

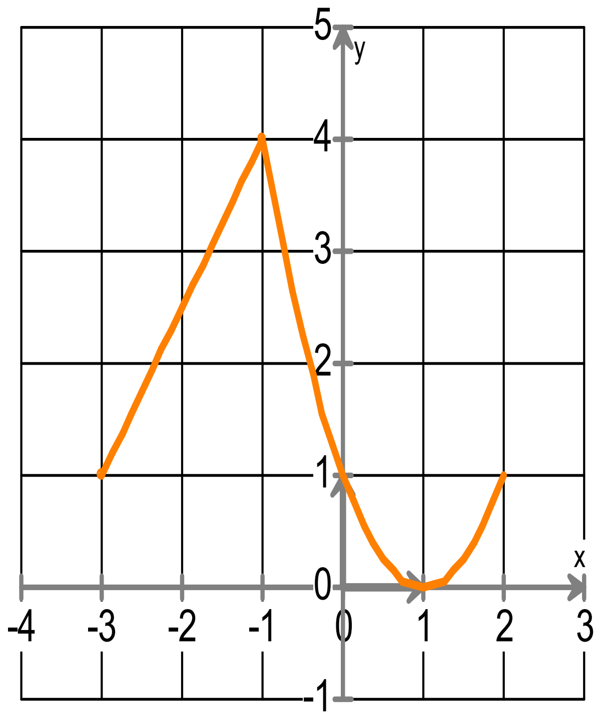
وهكذا: $f(x_1) > f(x_2)$

إذن الدالة f متناقصة تماما على المجال $[-2,+\infty[$.

تمرين محلول 7

القراءة على منحن للقيم الحدية للدالة على مجال

النـــــص:



المنحني (C_f) المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة f المعرفة على المجال $[-3;2]$. أجب عن الأسئلة التالية بالقراءة على المنحني (C_f).

1 . ما هما القيمتان الحديتان العظمى والصغرى للدالة f على المجال $[-3;2]$. و من أجل أي قيم تبلغ الدالة f هاتين القيمتين.

2 . حدد اتجاه تغير الدالة f

3 . شكل جدول تغيرات الدالة f.

الحـــــل:

1. من أجل كل x من $[-3\,;2]$، $f(x) \le 4$ و $f(-1)=4$. إذن القيمة الحدية العظمى للدالة f هي 4 و يتم بلوغها من أجل $x=-1$.

من أجل كل x من $[-3\,;2]$، $0 \le f(x)$ و $f(1)=0$. إذن القيمة الحدية الصغرى للدالة f هي 0 و يتم بلوغها من أجل $x=1$.

2. الدالة f متزايدة تماما على المجال $[-3;-1]$، متناقصة تماما على المجال $[-1;1]$ و متزايدة تماما على المجال $[1\,;2]$.

3. جدول تغيرات الدالة f هو كالتالي:

x	-3		-1		1		2
$f(x)$	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

تمرين محلول 8

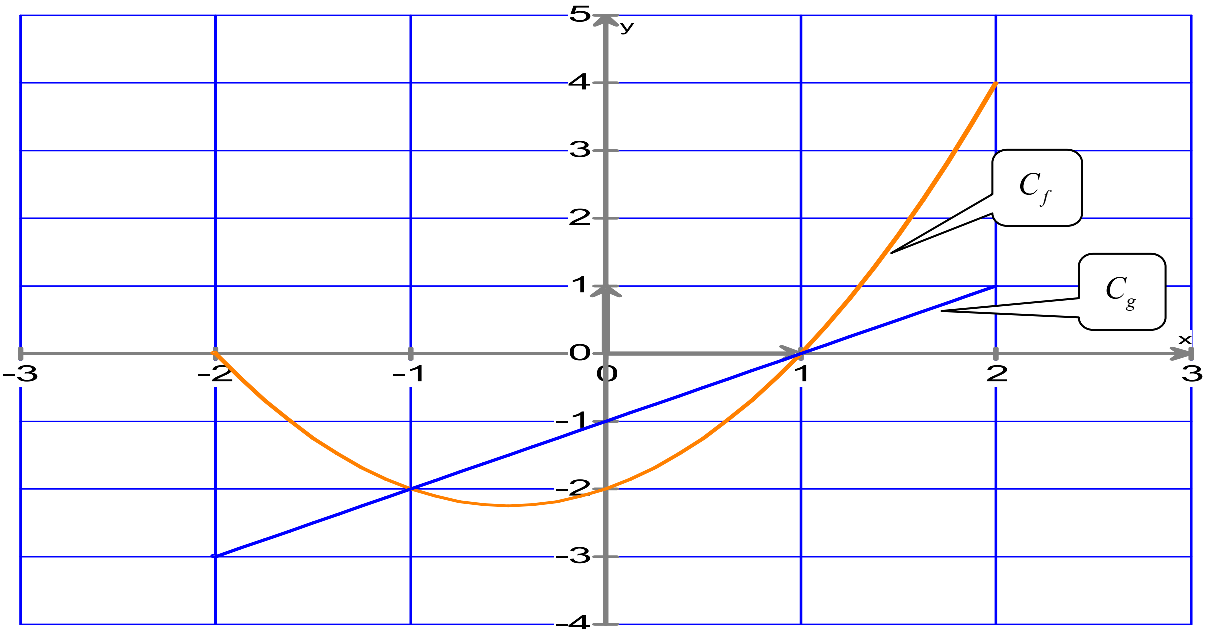
الحل البياني لمعادلات من الشكل $f(x)=g(x)$ و لمتراجحات من الشكل $f(x) \ge g(x)$

النـــــص:

نعتبر الدالتين f و g العرفتين على المجال $[-2;2]$ وليكن (C_f) و (C_g) منحنياهما في معلم $(O;I;J)$.(أنظر الشكل)

1 . حل في المجال $[-2;2]$ المعادلة $f(x)=g(x)$

2 . حل في المجال $[-2;2]$ المتراجحة $f(x) \prec g(x)$



<u>الحــــل:</u>

1. المنحنيان (C_f) و (C_g) يتقاطعان في نقطتين فاصلتاهما -1 و 1 على الترتيب. و بالتالي فمجموعة حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي: $S=\{-1;1\}$

2. يقع المنحني (C_f) أسفل المنحني (C_g) لمل يكون x محصورا بين -1 و 1. و بالتالي فمجموعة حلول المتراجحة $f(x) \prec g(x)$ هي: $S =]-1;1[$

طـــــريقــة

لحل بيانيا متراجحة من الشكل $f(x) \geq g(x)$ **، ننظر إلى وضعية المنحني الممثل للدالة** f **بالنسبة إلى المنحني الممثل للدالة** g