☜ الباب الثالث : الدوال التآلفية .

المحتويـــــات

الكفاءات المستهدفة

1. التعرف على دالة تآلفية.
2. تعيين عبارة دالة تآلفية.
3. التمثيل البياني لدالة تآلفية.
4. تعيين معامل توجيه دالة تآلفية بيانيا.
5. تحديد اتجاه تغير دالة تآلفية.
6. تحديد إشارة الثنائي: $ax+b$

الـــدرس

1. الدالة التآلفية

تعريف

a و b عددان حقيقيان.

تسمى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x) = ax + b$ دالة تآلفية.

أمثلة

- ❖ الدالة $f : x \mapsto 2x - 1$ دالة تآلفية.
- ❖ الدالة $g : x \mapsto -3x + 2$ دالة تآلفية.
- ❖ الدالة $h : x \mapsto -0.5x$ دالة تآلفية.
- ❖ الدالة $k : x \mapsto \frac{3}{2}$ دالة تآلفية.

2. التمثيل البياني

التمثيل البياني للدالة التآلفية f، المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x) = ax + b$، في معلم $(O;\vec{I},\vec{J})$ للمستوي هو المستقيم (D) ذو المعادلة $y = ax + b$.

العدد a هو معامل توجيه المستقيم (D) و العدد b هو الترتيب عند المبدأ.

حالات خاصة

❖ إذا كان $a = 0$ فإن، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = b$ و منه فالدالة f ثابتة

و تمثيلها البياني هو المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ و هو موازي لحامل محور الفواصل.

❖ إذا كان $b = 0$ فإن، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x) = ax$. تسمى f دالة خطية

و تمثيلها البياني هو مستقيم (D) يمر من المبدأ معادلته $y = ax$.

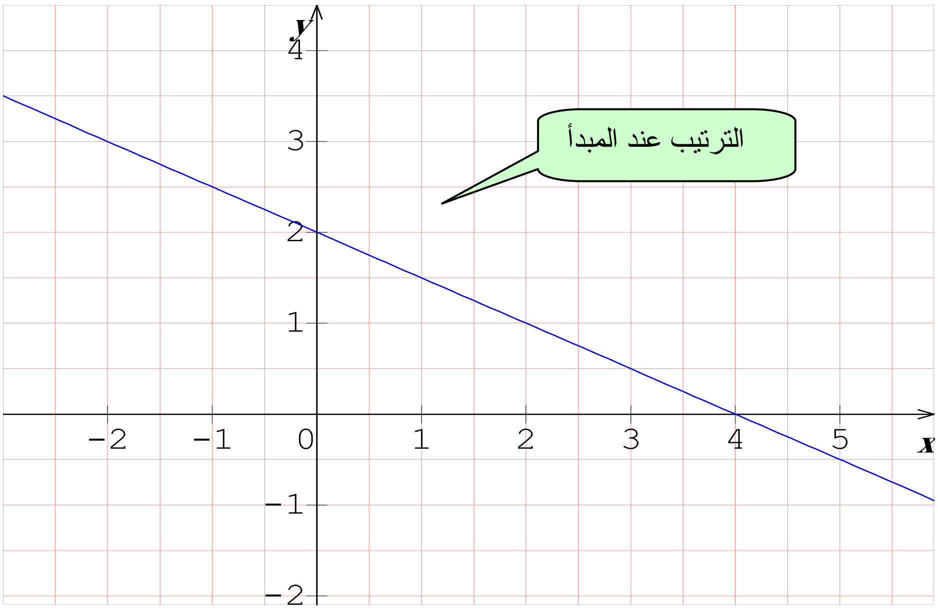
أمثلة

❖ التمثيل البياني للدالة التآلفية f، المعرفة على بـِـ: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$، في معلم $(O;\vec{I},\vec{J})$

للمستوي هو المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -\frac{1}{2}x + 2$.

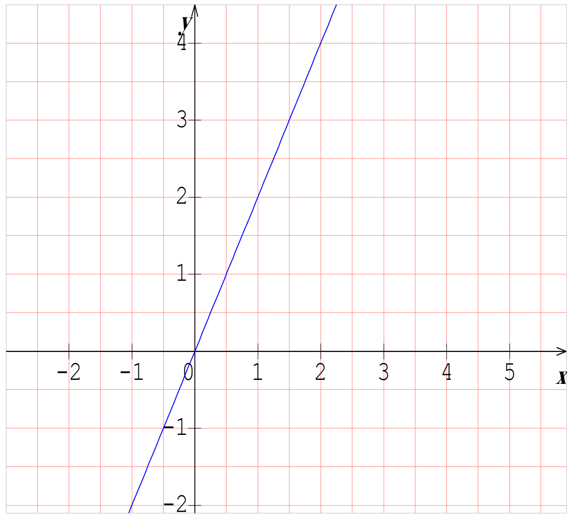
لرسم هذا المستقيم يمكن استعمال جدول قيم:

x	**0**	**2**
$f(x)$	**2**	**1**



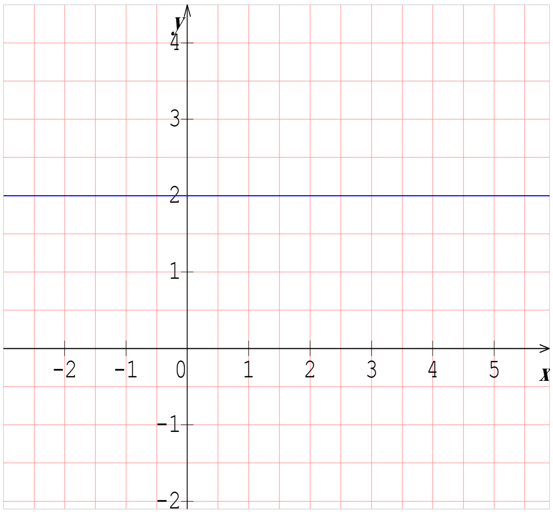
❖ التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto 2x$

المستقيم يمر من مبدأ المعلم



التمثيل البياني للدالة $f : x \mapsto 2$

المستقيم يوازي محور الفواصل



3. خواص

☒ الخاصية المميزة

▪ لتكن الدالة التآلفية f المعرفة على بـ: $f(x) = ax + b$ و ليكن x_1 و x_2 عددان حقيقيان مختلفان. لدينا:

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (ax_2 + b) - (ax_1 + b) \\ &= ax_2 - ax_1 \\ &= a(x_2 - x_1) \end{aligned}$$

و منه: $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$

إذن النسبة $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ ثابتة.

- **لتكن دالة f معرفة على بحيث: من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2 لدينا:**

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$$

ومنه بصفة خاصة إذا أخذنا: $x_2=x$ و $x_1=0$ و فرضنا $f(0)=b$ يكون لدينا:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=a$$

و منه $f(x)-b=ax$ **أي:** $f(x)=ax+b$

و بالتالي فالدالة f تآلفية.

مبرهنة

تكون الدالة f تآلفية إذا و فقط إذا كان التزايد $\Delta y=[f(x_2)-f(x_1)]$ متناسب مع التزايد $\Delta x=[x_2-x_1]$. و يعني هذا أنه: من أجل كل عددين حقيقيين مختلفين x_1 و x_2
لدينا: $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$$
a هو معامل توجيه المستقيم الممثل للدالة f.

ملاحظة

إذا كانت f دالة تآلفية معاملها a و علمت صورة عدد حقيقي λ بهذه الدالة، فإن الدالة التآلفية f معرفة على بـِ:

$$f(x)=a(x-\lambda)+f(\lambda)$$

4. اتجاه تغير دالة تآلفية

مبرهنة :

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على بـِـ: $f(x) = ax + b$.

* إذا كان $a = 0$ فإن f ثابتة على .

* إذا كان $a < 0$ فإن f متناقصة تماما على .

* إذا كان $a > 0$ فإن f متزايدة تماما على .

البرهان

- $a = 0$

لدينا: $f(x) = b$ و منه فإن الدالة f ثابتة على .

- $a > 0$

ليكن x_1 و x_2 عددان حقيقيان مختلفان حيث: $x_1 < x_2$.

لدينا: $ax_1 < ax_2$ (بالضرب في العدد a الموجب تماما)

ومنه: $ax_1 + b < ax_2 + b$ (بإضافة العدد b)

و بالتالي: $f(x_1) < f(x_2)$ ومنه فالدالة f متزايدة تماما على .

- $a < 0$

ليكن x_1 و x_2 عددان حقيقيان مختلفان حيث: $x_1 < x_2$.

لدينا: $ax_1 > ax_2$ (بالضرب في العدد a السالب تماما)

ومنه: $ax_1 + b > ax_2 + b$ (بإضافة العدد b)

و بالتالي: $f(x_1) > f(x_2)$ ومنه فالدالة f متناقصة تماما على .

$a > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	

$a < 0$

x	$+\infty$	$-\infty$
$f(x)$	$\searrow$	

أمثلة

- ❖ الدالة التآلفية $f : x \mapsto 2x - 1$ متزايدة تماما على .
- ❖ الدالة التآلفية $g : x \mapsto -3x + 2$ متزايدة تماما على .
- ❖ الدالة التآلفية $k : x \mapsto \frac{3}{2}$ ثابتة.

5. إشارة الثنائي $a\,x + b$ $(a \neq 0)$

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على بـِـ: $f(x) = ax + b$ مع $a \neq 0$.

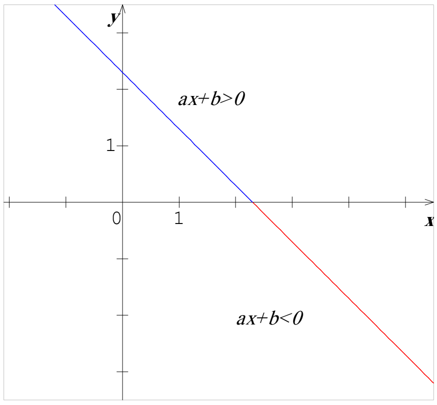
لدينا: $a\,x + b = 0$ يكافئ $a\,x = -b$ و هذا يعني: $x = -\frac{b}{a}$

المعادلة $f(x) = 0$ تقبل إذن حلا وحيدا هو $-\frac{b}{a}$ أي أن $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$ و منه فالمستقيم (D) الممثل للدالة f يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $-\frac{b}{a}$.

اتجاه تغير الدالة f مرتبط بإشارة العدد a. نميز إذن حالتين :

الحالة1: $a<0$

الدالة f متناقصة تماما على .

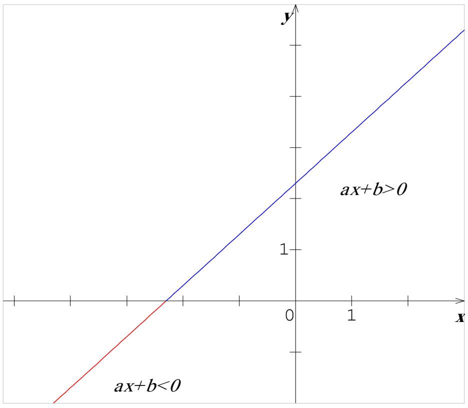


جدول الإشارة

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
تغير الدالة f		**0**	
إشارة $a\,x+b$	+	**0**	−

الحالة2: $a>0$

الدالة f متناقصة تماما على .



جدول الإشارة

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
تغير الدالة f		**0**	
إشارة $a\,x+b$	−	**0**	+

أمثلة

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x-4$	-	0	+

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	+	0	-

تمارين محلولة وطرائـــــق

تمرين محلول 1

تعيين دالة تآلفية معرفة بعددين حقيقيين و صورتيهما

النـــص:

لتكن f الدالة التآلفية التي تحقق: $f(1) = -1$ و $f(2) = 1$

1 . عين عبارة $f(x)$ **بدلالة** x.

2 . حل في المعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$

الحـــل:

1. نفرض أولا أن: $f(x) = ax + b$. **تعيين** f **يؤول إلى تعيين العددين الحقيقيين** a **و** b.

طريقة أولى:

حل جملة معادلتين ذات مجهولين من الدرجة الأولى

لدينا: $\begin{cases} f(1) = -1 \\ f(2) = 1 \end{cases}$ **و هذا يعني:** $\begin{cases} a(1) + b = -1 \\ a(2) + b = 1 \end{cases}$

باستعمال إحدى طرق حل جملة نجد: $a = 2$ **و** $b = -3$

إذن: $f(x) = 2x - 3$

طريقة ثانية: استعمال الخاصية المميزة للدالة التآلفية

لدينا: $a = \frac{f(1) - f(2)}{1 - 2}$ **و منه:** $a = \frac{-1-1}{1-2}$. **نجد هكذا:** $a = 2$.

لدينا إذن: $f(x) = 2x + b$.

لتعيين b **نعوض مثلا في العبارة السابقة لـ** f ، x **بـ** 2 **و** $f(x)$ **بـ** 1.

نحصل على: $1 = 2\times 2 + b$ **ومنه:** $b = -3$ **إذن:** $f(x) = 2x - 3$

.2 $f(x) = -\frac{1}{2}$ **يكافئ** $2x - 3 = -\frac{1}{2}$ **أي:** $2x = -\frac{1}{2} + 3$ **أي:** $2x = \frac{5}{2}$ **إذن** $x = \frac{5}{2}$

للمعادلة $f(x) = -\frac{1}{2}$ **حل وحيد:** $\frac{5}{2}$

طـــــريقـــة

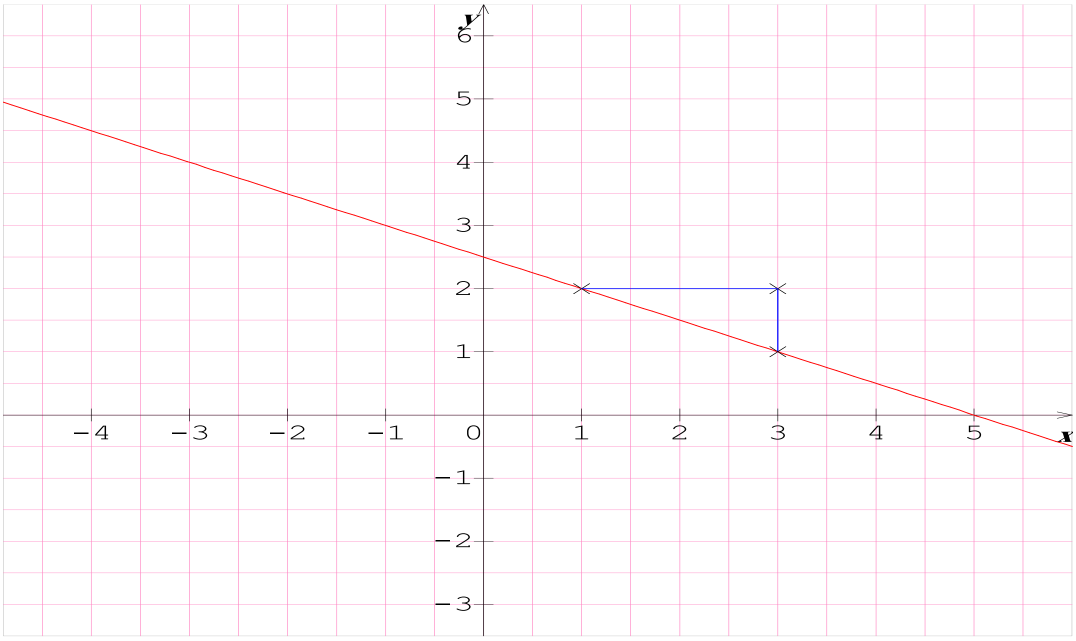
لتعيين دالة تآلفية معرفة بعددين حقيقيين و صورتيهما، نعين معامل التوجيه ثم الترتيب عند المبدأ.

تمرين محلول 2

القراءة البيانية لمعامل توجيه دالة تآلفية

النـــص:

المنحني (C_f) **المرسوم في الشكل المقابل هو التمثيل البياني لدالة تآلفية** f
حيث: $f(x) = ax + b$.
عين معامل التوجيه a



الحــــل:

لدينا مثلا: $a = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

و منه: $a = \dfrac{1 - 2}{2}$

إذن: $a = -\dfrac{1}{2}$

ملاحظة

إذا أردنا تعيين عبارة $f(x)$ بدلالة x نقوم بالإضافة إلى ما سبق بتعيين الترتيب عند المبدأ.

تمرين محلول 3

دراسة إشارة دالة تآلفية

النـــص:

لتكن f الدالة التآلفية المعرفة على بـِـ: $f(x) = -3x + 2$

1 . ما هو اتجاه تغير الدالة f ؟

2 . حل في المعادلة: $f(x) = 0$

3 . شكل جدول تغيرات الدالة f ثم أدرس حسب قيم x، إشارة $-3x + 2$

الحــل:

1. الدالة f تآلفية و إشارة معامل التوجيه (-3) سالبة

و منه فالدالة f متناقصة تماما على .

2. المعادلة $f(x)=0$ تكافئ $-3x+2=0$ و هذا يعني $-3x=-2$

إذن $x=\frac{2}{3}$

للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد: $\frac{2}{3}$

.3

x	$-\infty$ $\qquad \frac{2}{3}$ $\qquad +\infty$
تغيرالدالة f	$\searrow$ **0** $\searrow$
إشارة $-3x+2$	+ **0** −

يكون $-3x+2$ موجبا من أجل $x \le \frac{2}{3}$

يكون $-3x+2$ سالبا من أجل $x \ge \frac{2}{3}$